Lista 2: Cálculo I

A. Ramos *

March 17, 2018

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Límites e continuidade

1 Exercícios

Faça do livro texto, os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidos em aula.

2 Exercícios adicionais

2.1 Regras de cálculos para limites

Calcule os seguintes limites.

1. $\lim_{u\to 1} \frac{\sqrt{3+u^2}-2}{1-u} = -\frac{1}{2}$.
2. $\lim_{t\to 4} \frac{3-\sqrt{5+t}}{1-\sqrt{5-t}} = -\frac{1}{3}$.
3. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}} = -\frac{3}{2}$.
4. Se $f(x) = \sqrt{1+3x}$. Calcule $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.
5. $\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} = \frac{49}{24}$.
6. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{1+\sqrt{2+x}}-\sqrt{3}}{x-2} = \frac{1}{8\sqrt{3}}$.
7. Se $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$. Prove $\lim_{x\to 0} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} = a-b$. *Dica:* Considere se a e b são iguais a zero ou não.
8. Dado $a \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim_{x\to a} \frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = 3a$.

2.2 Limites laterais

Calcule, se existe, os seguintes limites.

1. $$\lim_{x\to \frac{5}{2}} \sqrt{|x| + [\![3x]\!]}.$$

   Sim, e o limite é $\sqrt{19/2}$.

2. $$\lim_{x\to \frac{7}{3}} \sqrt{|x| + [\![3x]\!]}.$$

   Não.

3. $$\lim_{x\to -3} \frac{[\![x-1]\!]-x}{\sqrt{|x|^2-[\![x]\!]}}.$$

   Não.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

4. $$\lim_{x\to 1} \frac{[\![x]\!]^2 - x^2}{[\![x]\!]^2 - x}.$$
   Não.

5. Considere a função
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+3x^2-9x-27}{x+3} & \text{, se } x \in (-\infty, -3) \\ ax^2 - 2bx + 1 & \text{, se } x \in [-3, 3] \\ \frac{x^2-22x+57}{x-3} & \text{, se } x \in (3, \infty) \end{cases}$$
   Para quais valores de a e b, existe os limites de f em $x = -3$ e $x = 3$? *Rpta:* $a = -1, b = 4/3$.

2.3 Limites Trigonométricos

Calcule os seguintes limites.

1. $$\lim_{x\to\pi} \frac{1 - \sin(\frac{x}{2})}{x - \pi} = 0$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2} = 0.$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{x^2} = \frac{1}{4}$$

4. $$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{1 - \sqrt{x}} = \pi$$

5. $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^7(x)}{x^2} = \frac{7}{2}$$

6. $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos(x))}{x^4} = \frac{1}{8}$$

7. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x) - \cos(2x) - 1}{\sin(x) - \cos(x)} = \sqrt{2}$$

8. $$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x) + \cos(\frac{\pi x}{2})}{\tan(\frac{\pi x}{4}) - 1} = -\frac{3\pi}{4}$$

2.4 Definição de limite

Usando a definição de limite. Prove que

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x-1} = 5$.
2. $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x^2+16} = \frac{1}{25}$.
3. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} x^2[\![x+2]\!] = \frac{1}{2}$.
4. $\lim_{x\to 4} \frac{x^3-15x-4}{x-3} = 0$.
5. $\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

2.5 Teorema de confronto e variantes

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq 3|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{f(x^3)}{x}$.
2. Considere duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a propriedade que $|\sin(x)| \leq g(x) \leq 4|x|$ e $0 \leq f(x) \leq 1 + |\sin(1/x)|$ para todo $x \neq 0$. Calcule $\lim_{x\to 0}(f(x)g(x) + \cos(x))$. *Rpta:* 1.
3. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $1 + x^2 + \frac{x^6}{3} \leq f(x) + 1 \leq \sec x^2 + \frac{x^6}{3}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule
$$\lim_{x\to 0} f(x) \text{ e } \lim_{x\to 0} f(x) \cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right).$$
   Rpta: Ambos são zeros.